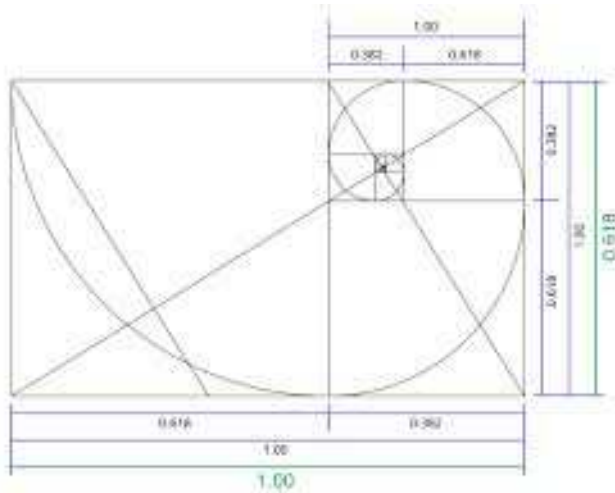


Μαθηματικά Μοντέλα

Άγγελος Μάρκος
Λέκτορας ΠΤΔΕ



Ορισμός

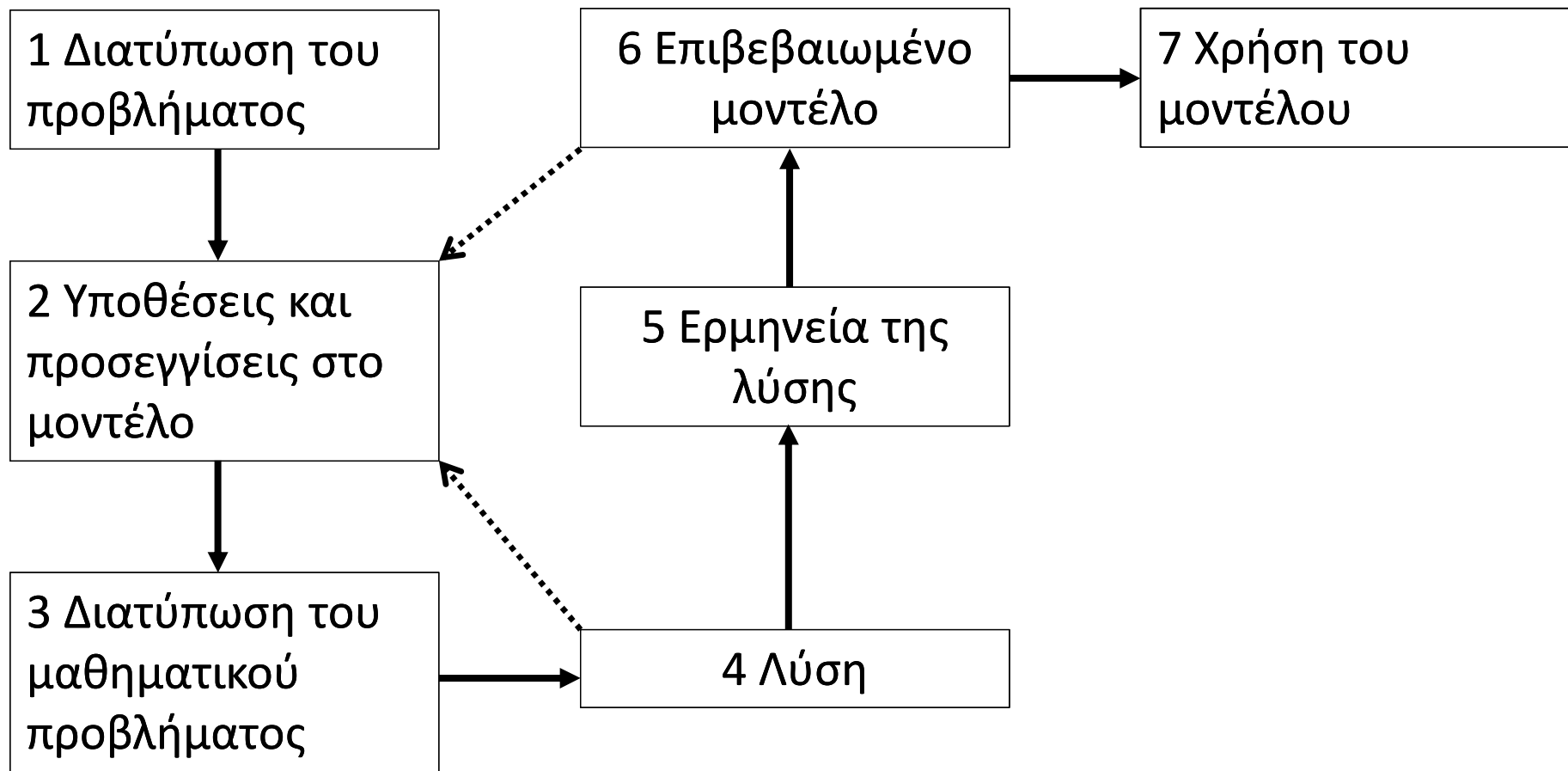
- Μαθηματικό μοντέλο είναι η μαθηματική περιγραφή ενός φαινομένου. Τα ονομαζόμενα εφαρμοσμένα μαθηματικά έχουν ως άμεσο στόχο την αναζήτηση μαθηματικών μοντέλων που να εξηγούν φαινόμενα που περιγράφονται από συγκεκριμένες παρατηρήσεις ή πειράματα.
- Η διαδικασία της αναζήτησης του μαθηματικού μοντέλου, ονομάζεται *μοντελοποίηση*.

Υλικό Μαθήματος

<http://www.amarkos.gr/courses/mathmode/>

Στάδια της μοντελοποίησης

- (α) Μορφοποίηση του προβλήματος. *Εξερεύνηση* του προβλήματος και *εντοπισμός* των συνθηκών και των προϋποθέσεων που πρέπει να ισχύουν στον πραγματικό κόσμο. *Μαθηματικοποίηση* του προβλήματος, δηλαδή το πέρασμα από τον πραγματικό κόσμο στο συμβολικό κόσμο των μαθηματικών.
- (β) Λύση του μαθηματικού προβλήματος.
- (γ) Εφαρμογή, που περιέχει την ερμηνεία της λύσης του μαθηματικού προβλήματος, την επιβεβαίωση και εξήγηση των αποτελεσμάτων των πειραμάτων ή των παρατηρήσεων και τέλος τη διερεύνηση των χρήσεων ενός μοντέλου και σε άλλες περιπτώσεις στην πράξη.



Μορφοποίηση: 1,2,3
Λύση: 4
Εφαρμογή: 5, 6, 7

Πραγματικός κόσμος: 1,6,7
Μαθηματικός κόσμος: 3, 4
Σύνδεση: 2, 5

Αρχές της Μοντελοποίησης (1)

- **Αρχή της Κατασκευής Μοντέλων:** Η λύση που προτείνεται από τον λύτη, απαιτεί την οικοδόμηση μιας συγκεκριμένης περιγραφής, επεξήγησης ή πρόβλεψης για μια συγκεκριμένη μαθηματική κατάσταση. Πρέπει να αναφερθούν τα διαφορετικά είδη μαθηματικών ποσοτήτων, σχέσεων, διαδικασιών και μοτίβων, τα οποία λαμβάνονται υπόψη κατά την οικοδόμηση του μοντέλου.
- **Αρχή της Πραγματικότητας:** Η δραστηριότητα μοντελοποίησης θα πρέπει να σχεδιάζεται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να μπορεί να μεταφραστεί από λύτες με διαφορετικά επίπεδα μαθηματικής ικανότητας. Επίσης, πρέπει να πρόκειται για δραστηριότητα που να μπορούν να τη συναντήσουν στην καθημερινότητα.

Αρχές της Μοντελοποίησης (2)

- **Αρχή της Αυτό-Αξιολόγησης:** Η δραστηριότητα μοντελοποίησης πρέπει να περιέχει κριτήρια τα οποία οι λύτες από μόνοι τους μπορούν να προσδιορίσουν και κατά συνέπεια, να αξιολογήσουν και να αναθεωρήσουν τον τρέχοντα τρόπο σκέψης τους.

- **Αρχή της Τεκμηρίωσης:** Οι λύτες πρέπει να ενθαρρύνονται στην πρόταση λύσεων οι οποίες αναδεικνύουν τον τρόπο με τον οποίο σκέφτονται για μια συγκεκριμένη προβληματική κατάσταση.

Αρχές της Μοντελοποίησης (3)

- **Αρχή της Συμμετοχικής Χρήσης και της Επαναχρησιμοποίησης:** Οι λύτες-μαθητές καλούνται να φτάνουν σε λύσεις που μπορούν να μοιραστούν με τους συμμαθητές τους και συνάμα σε γενικά μοντέλα τα οποία μπορούν να επαναχρησιμοποιήσουν.

- **Αρχή του Αποτελεσματικού Προτύπου:** Η αρχή αυτή επιβεβαιώνει ότι μια δραστηριότητα μοντελοποίησης είναι όσο το δυνατόν πιο απλή, αλλά συνάμα και όσο το δυνατό περισσότερης μαθηματικής αξίας.

Η χρήση των Η/Υ κατά την εφαρμογή δραστηριοτήτων μοντελοποίησης

- Αυξάνει το ενδιαφέρον και την ενεργητική συμμετοχή των μαθητών.
- Βοηθούν τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα τις διάφορες αναπαραστάσεις μιας έννοιας, δημιουργώντας περαιτέρω δυνατότητες για τη διασύνδεσή τους.
- Διευκολύνουν τη διαδικασία αξιολόγησης των λύσεων που προτείνουν οι μαθητές.

Μαθηματική Μοντελοποίηση στην Εκπαίδευση

Στους βασικούς σκοπούς της διδασκαλίας των μαθηματικών, δημοτικής και μέσης εκπαίδευσης, συμπεριλαμβάνονται η εφαρμογή από τους μαθητές βασικών αρχών της μαθηματικής μοντελοποίησης, η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων μιας έννοιας, η τεκμηρίωση και η αιτιολόγηση υποθέσεων και η αξιοποίηση των πλεονεκτημάτων των νέων τεχνολογιών στην ανάλυση, διαχείριση και επίλυση προβλημάτων. Οι μαθητές μπαίνουν στη διαδικασία να ασχοληθούν με σύνθετα προβλήματα τα οποία περιέχουν μαθηματικές διαδικασίες, όπως η διατύπωση υποθέσεων, η μοντελοποίηση ενός προβλήματος, η οργάνωση δεδομένων και ο αναστοχασμός στην πορεία λύσης .

Παραδοσιακή διδασκαλία στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος – ανάγκη για αλλαγή (1)

Στη σύγχρονη κοινωνία μας επιτακτική ανάγκη αποτελεί ο επαναπροσδιορισμός της φύσης των μαθηματικών, με απώτερο στόχο τη δημιουργία πολιτών που θα διαθέτουν πληθώρα δεξιοτήτων όπως για παράδειγμα ευελιξία, δημιουργικότητα και πρωτοτυπία .

Οι μαθητές μέσα από την παραδοσιακή διδασκαλία, δεν είναι προετοιμασμένοι να επιλύουν προβλήματα τα οποία εμφανίζονται εκτός του σχολικού χώρου και να κάνουν συνδέσεις μεταξύ των μαθηματικών και του πραγματικού κόσμου^{9,10}.

Παραδοσιακή διδασκαλία στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος – ανάγκη για αλλαγή (2)

Η λύση μαθηματικού προβλήματος, σύμφωνα με το National Research Council¹⁵, απαιτείται να αντιμετωπίζεται με δεδομένα και παρατηρήσεις από τον πραγματικό κόσμο και την επιστήμη. Για τη βελτίωση των ικανοτήτων επίλυσης προβλημάτων, οι μαθητές πρέπει να εργαστούν με προκλητικά προβλήματα του πραγματικού κόσμου, χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες τους εμπειρίες και μαθαίνοντας στρατηγικές, στοιχεία τα οποία πρέπει να αντανakλώνται στις λύσεις τους. Η επίλυση προβλήματος είναι κάτι περισσότερο από απλοί υπολογιστική ικανότητα. Είναι μια διαδικασία, η οποία εμπεριέχει παρατηρήσεις μοτίβων, δοκιμές, διατύπωση υποθέσεων και αξιολόγηση αποτελεσμάτων.

Μια δραστηριότητα μοντελοποίησης «Το πρόβλημα της επιλογής κινητού»

ΕΡΕΥΝΑ ΑΓΟΡΑΣ

Μια εταιρία κατασκευής κινητών τηλεφώνων, θέλοντας να αυξήσει τις πωλήσεις της, ερεύνησε τις προτιμήσεις 5 ομάδων πελατών, με σκοπό να τις λάβει υπόψη της στην κατασκευή των νέων μοντέλων.

Ο παρακάτω πίνακας, δείχνει τα αποτελέσματα της έρευνας. Σε κάθε στήλη, δίδονται με τη σειρά προτίμησης, τα χαρακτηριστικά των κινητών τηλεφώνων που προτιμά η κάθε ομάδα (οι ομάδες είναι όλες ισάριθμες).

Η αποστολή σας είναι να πάρετε τα δεδομένα, και με βάση αυτά, να κατατάξετε τα 10 χαρακτηριστικά από το ελκυστικότερο προς το λιγότερο ελκυστικό. Για να το πετύχετε, πρέπει να βρείτε μια μέθοδο αξιολόγησης (ταξινόμησης). Η μέθοδος πρέπει να είναι εφαρμόσιμη και σε άλλες περιπτώσεις όπου μας δίνονται παρόμοια δεδομένα.

Πρέπει να είστε σε θέση να εξηγήσετε τη μέθοδο στην εταιρία, ώστε να μπορεί να την χρησιμοποιεί σε κάθε έρευνα αγοράς που θα κάνει στο μέλλον.

Μια δραστηριότητα μοντελοποίησης «Το πρόβλημα της επιλογής κινητού»

1η ομάδα	2η ομάδα	3η ομάδα	4η ομάδα	5η ομάδα
MP3	κάμερα	εμφάνιση	εμφάνιση	εμφάνιση
εμφάνιση	εμφάνιση	κάμερα	μέγεθος οθόνης	μέγεθος οθόνης
μέγεθος οθόνης	MP3	τιμή	κάμερα	MP3
κάμερα	μέγεθος οθόνης	MP3	MP3	τιμή
μάρκα	blue tooth	μέγεθος οθόνης	blue tooth	blue tooth
θύρα USB	τιμή	blue tooth	μάρκα	κάμερα
blue tooth	μάρκα	θύρα USB	θύρα USB	θύρα USB
τιμή	θύρα USB	μάρκα	τιμή	μάρκα
ραδιόφωνο	διάρκεια μπαταρίας	ραδιόφωνο	διάρκεια μπαταρίας	ραδιόφωνο
διάρκεια μπαταρίας	ραδιόφωνο	διάρκεια μπαταρίας	ραδιόφωνο	διάρκεια μπαταρίας

Μια δραστηριότητα μοντελοποίησης «Το πρόβλημα της επιλογής κινητού»

Η ανάλυση της διαδικασίας της μοντελοποίησης αναμένεται να αναδείξει:

1. Την πορεία της σκέψης των μαθητών στην ταξινόμηση, επιλογή και τη στάθμιση των δεδομένων. Αναμένεται ο μαθηματικός συλλογισμός των συμμετεχόντων να περάσει από στάδια (κύκλους) χαμηλότερης ποιότητας σε στάδια (κύκλους) υψηλότερης ποιότητας και πολυπλοκότητας της μαθηματικής σκέψης.
2. Τη χρονική στιγμή που θα ποσοτικοποιήσουν οι συμμετέχοντες τον ποιοτικό παράγοντα του κάθε προβλήματος.

Μια άλλη δραστηριότητα μοντελοποίησης «Το πρόβλημα της επιλογής προγράμματος κινητής τηλεφωνίας»

Οι γονείς σου αποφάσισαν να σου αγοράσουν ένα κινητό τηλέφωνο και να διαθέσουν 20 ευρώ το μήνα για τη χρήση του. Η εταιρεία κινητής τηλεφωνίας διαθέτει δυο προγράμματα σύνδεσης σύμφωνα με το επόμενο πίνακα

	Χρέωση Ομιλίας	Γραπτά Μηνύματα
Πρόγραμμα Α	0,33€/min	0,1450€/SMS
Πρόγραμμα Β	0,45€/ min	0,1136€/SMS

- 1.** Αν επιλέξεις μόνο υπηρεσίες φωνής ποιο πρόγραμμα σε συμφέρει; Ποιος είναι ο μέγιστος χρόνος που σου παρέχει αυτό το πρόγραμμα;

- 2.** Αν επιλέξεις να στέλνει μόνο γραπτά μηνύματα ποιό πρόγραμμα σε συμφέρει; Πόσα γραπτά μηνύματα σου επιτρέπει να στείλεις αυτό το πρόγραμμα;
- 3.** Αν τελικά μιλάς μία ώρα το μήνα πόσα γραπτά μηνύματα μπορείς να στείλεις χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα A και πόσα χρησιμοποιώντας το B;
- 4.** Αν x είναι ο αριθμός των λεπτών ομιλίας και y ο αριθμός των γραπτών μηνυμάτων που μπορείς να χρησιμοποιήσεις ξοδεύοντας 20€, να γράψεις μία εξίσωση για κάθε πρόγραμμα.
- 5.** Να παραστήσεις γραφικά τις δυο εξισώσεις στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.
- 6.** Που τέμνονται οι δυο γραφικές παραστάσεις; Τι παριστάνει το σημείο τομής τους;
- 7.** Ποιό πρόγραμμα θα επιλέξεις τελικά; Προσπάθησε να δικαιολογήσεις μαθηματικά την επιλογή σου.

Μια ακόμη δραστηριότητα μοντελοποίησης «Το πρόβλημα της εκδρομής»

«Το σχολείο σας οργανώνει μια εκδρομή. Απευθύνεται σε ένα τουριστικό πρακτορείο για να πάρει προσφορά. Το πρακτορείο αρχικά σκόπευε να χρεώσει 150€ για κάθε μαθητή. Δεδομένου όμως ότι 100 μαθητές έχουν ήδη δηλώσει συμμετοχή στην εκδρομή προτίθεται να μειώσει το κόστος συμμετοχής όλων των μαθητών κατά 10 € για κάθε επιπλέον μαθητή που συμμετέχει πέρα από τους πρώτους 100. Να διερευνήσετε πως διαμορφώνεται το κόστος της εκδρομής μετά την νέα αυτή προσφορά του τουριστικού πρακτορείου; Πόσοι μαθητές πρέπει να συμμετάσχουν στην εκδρομή ώστε η προσφορά αυτή να συμφέρει το πρακτορείο και πόσοι για να συμφέρει τους μαθητές;»

Προβλήματα Fermi (1)

- Πόσοι κουρδιστές πιάνου υπάρχουν στην Αλεξανδρούπολη;
- Πόσο χαρτί ξοδεύει το σχολείο σας σε έναν μήνα;
- Το σχολείο σου σχεδιάζει μια εκδρομή στην Αθήνα. Είναι καλύτερο να ταξιδέψετε με τρένο ή με λεοφωρείο;
- Σε έναν αυτοκινητόδρομο έχει σχηματιστεί μια ουρά οχημάτων κατά μήκος 3km. Πόσα οχήματα βρίσκονται σε αυτήν την ουρά;
- Πόσα παιδιά της τάξης σου ζυγίζουν όσο μια πολιική αρκούδα;

Προβλήματα Fermi (1)

- Το θέμα των προβλημάτων πρέπει να κινητοποιεί και να προωθεί τη συνεργασία μεταξύ μαθητών.
- Η διατύπωση του προβλήματος δεν πρέπει να περιέχει αριθμούς έτσι ώστε να μην αρχίσουν οι μαθητές να υπολογίζουν από την αρχή, χωρίς πρώτα να έχουν αναλύσει το πρόβλημα.
- Τα προβλήματα πρέπει να είναι όσο το δυνατό πιο κοντά σε ένα πραγματικό, καθημερινό πρόβ

“Τα μαθηματικά μοντέλα αποτελούν κύρια μία απομίμηση της φύσης σύμφωνα με ορισμένα πειράματα ή παρατηρήσεις. Όμως οι πορείες των διαδικασιών εξέλιξης της φύσης αλληλοεπιδρούν και καθιστούν αδύνατη την εφαρμογή ενός ολοκληρωμένου, τέλειου, μοντέλου που να αφορά όλες της εκδηλώσεις της φύσης. Αυτό, δεν πρέπει να οδηγήσει στην απαισιόδοξη άποψη της αναζήτησης ενός τέλειου γενικού μαθηματικού μοντέλου, αλλά στην αισιόδοξη άποψη της διαρκούς αναζήτησης”.

Θ.Β.